Министерство образования Иркутской области

Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
Иркутской области «Иркутский авиационный техникум»
(ГБПОУИО «ИАТ»)

УТВЕРЖДАЮ
Директор ГБПОУИО «ИАТ»
_____________ А.Н. Якубовский

Комплект методических указаний по выполнению лабораторных и практических работ по дисциплине

ЕН.01 Элементы высшей математики

по специальности

09.02.01 Компьютерные системы и комплексы

Иркутск 2017

РАССМОТРЕНЫ

ЦК ОД, МЕН
Протокол № 2 от 12.09.2017 г.
Председатель ЦК

_______________ / Г.В. Перепияко /

Методические указания разработаны на основе рабочей программы дисциплины ЕН.01Элементы высшей математики,
учебного плана специальности 09.02.01 Компьютерные системы и комплексы

Разработчик:
Максимова Реорита Петровна

Перечень практических работ

Практическая работа № 1

Вычисление определителей 2-го и 3-го порядка.

Цель работы: Проверить знание свойств определителей 2 и 3 порядков, правила вычисления определителей, вычислительные навыки.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить основные понятия матрицы и определителя.
2. Рассмотреть решенные примеры.
3. Решить задания для самостоятельной работы.
4. Сдать преподавателю тетради для практических работ.

1. Основные понятия.

1.1. Матрицей размера 2×2 называется совокупность чисел, расположенных в виде таблицы из 2 строк и 2 столбцов.

Числа, составляющие $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ эту матрицу, называются ее элементами и обозначаются буквой с двумя индексами. Первый индекс указывает номер строки, а второй - номер столбца, на пересечении которых стоит данное число.

1.2. Определителем (или детерминантом) второго порядка, соответствующим данной матрице, называется число $a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ называются элементами определителя.

Определитель обозначают символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

По определению, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$.

1.3. Аналогично, если

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ - квадратная матрица размера 3×3,

то соответствующим ей определителем третьего порядка называется число Δ, которое вычисляется одним из способов.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

1.4. Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя D называется такой новый определитель, который получается из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, содержащих данный элемент.

1.5. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя D называется минор M_{ij} этого элемента, взятый со знаком (-). Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} принято обозначать A_{ij}.

Таким образом, $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

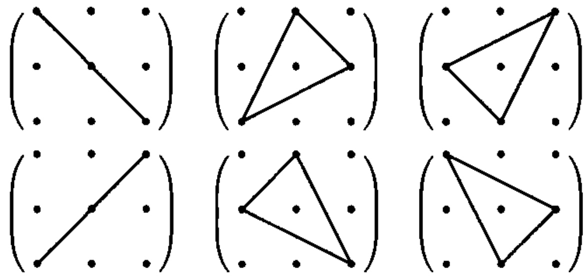
1.6. Определители третьего порядка, их вычисление

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ - квадратная матрица размера 3 x 3

1.6.1. Правило «треугольников» (правило Саррюса) вычисления определителя

«+»

«–»



1.6.2. Разложение определителя по элементам строки и столбца

Числа a_{11}, a_{12}, a_{13} называются элементами первой строки определителя. Определитель вычисляется следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Формула дает разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки и сводит вычисление определителя третьего порядка к вычислению определителей второго порядка.

Определители третьего порядка обладают всеми свойствами определителей второго порядка.

2. Примеры.

2.1. Вычислить определитель второго порядка:

1.1. $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) - (-3) \cdot 5 = -8 + 15 = 7$

1.2. Вычислить определитель третьего порядка по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3{\cdot}5{\cdot}3 + 2{\cdot}3{\cdot}3 + 2{\cdot}4{\cdot}1 - 3{\cdot}5{\cdot}1 - 2{\cdot}2{\cdot}3 - 4{\cdot}3{\cdot}3 = 45 + 18 + 8 - 15 - 12 - 36 = 8$$

1.3. Вычислить определитель третьего порядка разложением по элементам первой строки

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (15 - 12) - 2 \cdot (6 - 9) + (8 - 15) = 9 + 6 - 7 = 8$$

3. Задания для самостоятельной работы.

3.1. Вычислить определители второго порядка:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$

3.2. Вычислить определители третьего порядка по правилу Саррюса:

3) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

2.3. Вычислить определитель третьего порядка разложением по элементам первой строки

5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ 6) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$

Практическая работа № 2
Метод Крамера. Решение систем линейных алгебраических уравнений.

Цель работы:

Проверить умения обучающихся решать системы линейных уравнений по правилу Крамера.

Порядок выполнения работы:

1. Решить задания для самостоятельной работы.
2. Сдать преподавателю тетради для практических работ.

Задания для самостоятельной работы (12 вариантов)

Решить системы линейных уравнений по формулам Крамера:

1. $\begin{cases} 2x + y + 3z = 7, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 3x + 2y + z = 6. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x - y + 2z = 3, \\ x + y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -3. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 3x - y + z = 12, \\ x + 2y + 4z = 6, \\ 5x + y + 2z = 3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x - y + 3z = -4, \\ x + 3y + 3z = 11, \\ x - 2y + 2z = -7. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 12, \\ 3x + 4y - 2z = 6, \\ 2x - y - z = -9. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 8x + 3y - 6z = -4, \\ x + y - z = 2, \\ 4x + y - 3z = -5. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x + y - 3z = 9, \\ x + y - z = -2, \\ 8x + 3y - 6z = 12. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 33, \\ 7x - 5y = 24, \\ 4x + 11z = 39. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 12, \\ 7x - 5y + z = -33, \\ 4x + z = -7. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x + 4y - z = 6, \\ 5y + 4z = -20, \\ 3x - 2y + 5z = -22. \end{cases}$ 11. $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 21, \\ 3x + 4y - 2z = 9, \\ 2x - y - z = 10. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} 3x - 2y - 5z = 5, \\ 2x + 3y - 4z = 12, \\ x - 2y + 3z = -1. \end{cases}$

Практическая работа № 3
Метод Гаусса. Решение систем линейных алгебраических уравнений.

Цель работы:
Проверить умения обучающихся решать системы линейных уравнений методом Гаусса.
Порядок выполнения работы:
1. Решить задания для самостоятельной работы.
2. Сдать преподавателю тетради для практических работ.

Задания для самостоятельной работы (12 вариантов)
Решить системы линейных уравнений методом Гаусса:

1. $\begin{cases} 2x + y + 3z = 7, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 3x + 2y + z = 6. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x - y + 2z = 3, \\ x + y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -3. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 3x - y + z = 12, \\ x + 2y + 4z = 6, \\ 5x + y + 2z = 3. \end{cases}$

$$4.\begin{cases}2x - y + 3z = -4,\\ x + 3y + 3z = 11,\\ x - 2y + 2z = -7.\end{cases} \quad 5.\begin{cases}3x - 2y + 4z = 12,\\ 3x + 4y - 2z = 6,\\ 2x - y - z = -9.\end{cases} \quad 6.\begin{cases}8x + 3y - 6z = -4,\\ x + y - z = 2,\\ 4x + y - 3z = -5.\end{cases}$$

$$7.\begin{cases}4x + y - 3z = 9,\\ x + y - z = -2,\\ 8x + 3y - 6z = 12.\end{cases} \quad 8.\begin{cases}2x + 3y + 4z = 33,\\ 7x - 5y = 24,\\ 4x + 11z = 39.\end{cases} \quad 9.\begin{cases}2x + 3y + 4z = 12,\\ 7x - 5y + z = -33,\\ 4x + z = -7.\end{cases}$$

$$10.\begin{cases}x + 4y - z = 6,\\ 5y + 4z = -20,\\ 3x - 2y + 5z = -22.\end{cases} \quad 11.\begin{cases}3x - 2y + 4z = 21,\\ 3x + 4y - 2z = 9,\\ 2x - y - z = 10.\end{cases} \quad 12.\begin{cases}3x - 2y - 5z = 5,\\ 2x + 3y - 4z = 12,\\ x - 2y + 3z = -1.\end{cases}$$

Практическая работа № 4
Решение упражнений по теме "Производная". Вычисление производной сложной функции, суммы, произведения, частного функций

Цель работы:
Проверить умения нахождения производной функции.
Порядок выполнения работы:
1. Повторить формулы производных основных элементарных функций (таблица).
2. Рассмотреть решенные примеры.
3. Решить задания для самостоятельной работы.
4. Сдать преподавателю тетради для практических работ.

1. Таблица производных основных элементарных функций:

1. $(c)' = 0, (cu)' = cu'$
2. $x' = 1$
3. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in R)$
4. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
5. $(\frac{1}{u^n})' = -\frac{n}{u^{n+1}} \cdot u'$
6. $(u + v)' = u' + v'$;
7. $(uv)' = u'v + v'u$;
8. $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
9. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
10. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
12. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
13. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
14. $(\cos u)' = \sin u \cdot u'$
15. $(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
16. $(ctgu)' = \frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
17. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u'$
18. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u'$
19. $(arctgu)' = \frac{1}{1 + u^2} \cdot u'$

11. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$

20. $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

2. Примеры:

2.1. Найти производные следующих функций:

1) $y = \left(x^3 - 2x^2 + 5\right)^3$; 2) $y = \left(x^3 - 6\right)^6$; 3) $f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)^n$;

4) $y = \frac{1}{(1-x)^5}$; 5) $y = \frac{1}{(ax+b)^n}$; 6) $y = \frac{\left(x^4+1\right)^3}{\left(x^3+1\right)^2}$.

Решение:

1) Полагая $u = x^3 - 2x^2 + 5$, получим $y = u^3$.

Применяя формулу (3), находим $y' = 3u^2 \cdot u'$.

Следовательно, $y' = 3(x^3 - 2x^2 + 5)^2 \cdot (3x^2 - 4x)$.

2.2. Вычислите $f'(2)$:

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 6}$; 2) $f(t) = \sqrt{t^2 - t + 1}$; 3) $y = \sqrt{r^2 - x^2}$;

4) $y = \frac{1+2x}{\sqrt{1-2x}}$.

2.3. Тело массой 8 кг движется прямолинейно по закону $s = 3t^2 + t + 4$. Найти кинетическую энергию тела $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ через 3 с после начала движения.

Решение:

Найдем скорость движения тела в момент времени t: $v = \frac{ds}{dt} = 6t + 1$.

Вычислим скорость тела в момент $t = 3$; $v(3) = 6\cdot 3 + 1 = 19$ (м/с). Вычислим кинетическую энергию тела в момент времени t=3:

$\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{8\cdot 361}{2} = 1444$ (Дж)

2.4. Найдите скорость и ускорение в указанные моменты времени для точки, движущейся прямолинейно, если движение точки задано уравнением:

$s = t^3 + 5t^2 + 4$, $t = 2$

Решение:

Скорость: $v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 + 10t$, $v(2) = 3\cdot 2^2 + 10\cdot 2 = 12 + 20 = 32$ (м/с).

Ускорение: $a = v' = 6t + 10 = 6\cdot 2 + 10 = 22$ (м/с^2).

2) $s = \sqrt{t}$, $t = 1$;

3) $s = t^2 + 11t + 30$, $t = 3$.

3. Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1.

Найдите производную $f'(x)$:

1. $f(x) = \sqrt{x}\,(x + 2)$; **2.** $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x - 1}$; **3.** $f(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{3}{2}x^2 - 3x$;

4. $f(x) = (x - 1)(x + 2)$.

5. $f(x) = \sin(2x^2 - 3x + 1)$; **6.** $f(x) = \cos^3(2x - 1)$; **7.** $f(x) = \left(\sqrt{x} + \dfrac{x^2}{4}\right)^3$.

Вариант 2.

Найдите производную $f'(x)$:

1. $f(x) = \sqrt{x - 1}\,(x + 1)$; **2.** $f(x) = \dfrac{3x - x^2}{x + 2}$; **3.** $f(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{x^2}{2} - 2x$;

4. $f(x) = (x + 3)(x - 2)$.

5. $f(x) = \cos(3x^2 - 4x + 2)$; **6.** $f(x) = \sin^3(2 - 3x)$; **7.** $f(x) = \left(x^2 - 2\sqrt{x}\right)^4$.

Практическая работа №5
Вычисление пределов. 1-й и 2-й замечательные пределы

Цель работы:

На конкретных примерах научиться вычислять пределы различными способами.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить виды неопределенностей, рассмотреть решенные примеры.
3. Решить задания для самостоятельной работы.
4. Сдать преподавателю тетради для практических работ.

1. Основные понятия и примеры.

1.1. Типы неопределенностей и методы их раскрытия

Часто при вычислении пределов какой-либо функции, непосредственное применение теорем о пределах не приводит к желаемой цели. Так, например, нельзя применять теорему о пределе дроби, если ее знаменатель стремится к нулю. Поэтому часто прежде, чем применять эти теоремы, необходимо тождественно преобразовать функцию, предел которой мы ищем. Рассмотрим некоторые приемы раскрытия неопределенностей.

1.1.1. Неопределенность вида $\frac{0}{0}$

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x-5}{x^2-25}$

Решение: При подстановке вместо переменной *x* числа 5 видим, что получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для раскрытия этой неопределенности нужно разложить знаменатель на множители: $x^2 - 25 = (x-5)(x+5)$. Получили общий множитель (x-5), на который можно сократить дробь. Заданный предел примет вид: $\lim\limits_{x \to 5} \frac{1}{x+5}$.

Подставив x=5, получим результат: $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x-5}{x^2-25} = \lim\limits_{x \to 5} \frac{x-5}{x^2-25} = \lim\limits_{x \to 5} \frac{1}{x+5} = \frac{1}{10}$

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$

Решение: При подстановке вместо переменной *x* числа 3 видим, что получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия разложим числитель и знаменатель на множители и сократим на общий множитель (*x-3*). В результате получим новый предел, знаменатель которого при подстановке вместо переменной x числа 3 не равен нулю. Этот предел легко вычисляется. Таким образом, неопределенность будет раскрыта.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x-2}{x+3} = \frac{3-2}{3+3} = \frac{1}{6}$$

1.1.2. Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$

Пример 3. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1-8x}{4x+5}$

Решение: При подстановке вместо переменной *x* бесконечности (∞) видим, что получается неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия нужно числитель и знаменатель разделить на наивысшую степень, в данном случае на *x*. Получим:

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1-8x}{4x+5} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{8x}{x}}{\frac{4x}{x}+\frac{5}{x}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}-8}{4+\frac{5}{x}} = \frac{0-8}{4+0} = \frac{-8}{4} = -2$, т.к. величины $\frac{1}{x}, \frac{5}{x}$ являются бесконечно малыми и их пределы равны 0.

1.2. Вычисление первого и второго замечательного предела

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Свойства:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\frac{a}{b}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgax}{bx}=\frac{a}{b}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$
4. неопределенность будет раскрыта.
5. $\lim\limits_{x\to 0}$ $\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Пример 4. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

Решение: При подстановке вместо переменной *x* числа 0 видим, что получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия воспользуемся первым замечательным пределом $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ и его следствием $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$. После чего предел легко вычисляется по теоремам. Таким образом, неопределенность будет раскрыта.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{2}{3}\right) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

3. Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1	**Вариант 2**
1. Вычислить предел функции: $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 8x + 15}$. 2. Вычислить предел функции: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x + 5}{3x - 6}$. 3. Вычислить предел функции: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 17x}{\sin 12x}$. 4. Вычислить предел функции: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{7}{x}\right)^{\frac{x}{3}}$.	1. Вычислить предел функции: $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^2 + x - 20}{x^2 - 16}$. 2. Вычислить предел функции: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{3x + 6}{2x - 4}$. 3. Вычислить предел функции: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{\sin 13x}$. 4. Вычислить предел функции: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{12}{x}\right)^{\frac{x}{4}}$.
Вариант 3	**Вариант 4**
1. Вычислить предел функции: $\lim\limits_{x \to 7} \frac{x^2 - 49}{x^2 - 5x - 14}$. 2. Вычислить предел функции: $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 + 4}{2x - 6}$. 3. Вычислить предел функции: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 9x}{\sin 4x}$. 4. Вычислить предел функции:	1. Вычислить предел функции: $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2 - 12x + 35}{x^2 - 25}$. 2. Вычислить предел функции: $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2 - 1}{2x - 10}$. 3. Вычислить предел функции: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 8x}{\sin 19x}$. 4. Вычислить предел функции:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{15}{x}\right)^{\frac{x}{5}}$.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{2x}$.

Практическая работа № 6
Интегрирование методом замены переменной

Цель работы:
На конкретных примерах научиться вычислять неопределенный интеграл методом замены переменной.

Порядок выполнения работы:
1. Повторить основные понятия, формулы интегралов (таблица).
2. Рассмотреть решенные примеры.
3. Решить задания для самостоятельной работы.
4. Сдать преподавателю тетради для практических работ.

1. Основные понятия.

Метод замены переменной (метод подстановки) является одним из наиболее эффективных и распространенных приемов интегрирования, позволяющих во многих случаях упростить вычисление интеграла. Суть этого метода состоит в том, что путем введения новой переменной интегрирования заданный интеграл сводится к новому интегралу, который легко вычисляется непосредственным интегрированием.

Применим подстановку $x=\varphi(t)$,
где $\varphi(t)$ – функция, имеющая непрерывную производную.
Тогда $f(x) = f[\varphi(t)]$, $dx=\varphi'(t)dt$ и, следовательно,

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \qquad (1)$$

Формула (1) называется *формулой замены переменной в неопределенном интеграле.*

Таблица интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ (n\neq -1)$	7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = ctgx + C$	13. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctgx + C$
2. $\int dx = x + C$	8. $\int tgxdx = \ln\lvert\cos x\rvert + C$	14. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	9. $\int ctgxdx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
4. $\int \sin xdx = -\cos xdx$	10. $\int e^x dx = e^x + C$	

5. $\int \cos xdx = \sin xdx$ 6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	11. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ 12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$	16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

2. Примеры:

2.1. Вычислите $\int (x^3 - 3x + \sin x)dx$

Решение: Для вычисления интеграла сначала воспользуемся свойствами неопределенного интеграла, а затем применим 1 и 4 табличные интегралы:

$$\int (x^3 - 3x + \sin x)dx = \int x^3 dx - 3 \cdot \int xdx + \int \sin xdx = \frac{x^{3+1}}{3+1} - 3 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} - \cos x + C =$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2} \cdot x^2 - \cos x + C$$

2.2. Вычислите $\int \frac{3 + 2x - x^2}{x} dx$

Решение: Для вычисления интеграла сначала каждый член числителя почленно разделим на знаменатель, затем воспользуемся 2 и 3 свойствами неопределенного интеграла и применим 1 и 3 табличные интегралы

$$\int \frac{3 + 2x - x^2}{x} dx = \int \frac{3}{x} dx + \int \frac{2x}{x} dx - \int \frac{x^2}{x} dx = 3 \cdot \int \frac{dx}{x} + 2 \cdot \int dx - \int xdx = 3 \ln x + 2x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + c$$

2.3. Вычислить $\int (3x-4)^3 dx$

Решение: Введем новую переменную $t = 3x\text{-}4$, тогда $dt = t' \cdot dx = (3x\text{-}4)' \cdot dx?$

откуда $\mathrm{dx} = \frac{dt}{3}$. Подставим новую переменную в интеграл (вместо выражения $3x\text{-}4$ подставим t, вместо dx подставим $\frac{dx}{3}$).

$$\int (3x-4)^3 dx = \int t^3 \cdot \frac{dt}{3} = \frac{t^4}{12} + C$$

Далее нужно вернуться к первоначальной переменной. Для этого сделаем обратную замену (вместо t подставим выражение $3x\text{-}4$), получим окончательный ответ^

$$\int (3x-4)^3 dx = \frac{(3x-4)^4}{12} + C$$

3. Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1		Вариант 2	
«3»	«4-5»	«3»	«4-5»

а) $\int \frac{5dx}{1+x^2}$	а) $\int \frac{3+2x-x^2}{x}$	а) $\int \frac{3dx}{1+x^2}$	а) $\int \frac{x^2-7x+12}{x}$
б) $\int (x^3-3x+\sin x)dx$	б) $\int \frac{5-2\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{x^2}}$	б) $\int (x^4-2x+\frac{1}{\sqrt{x}})dx$	б) $\int \frac{2\sqrt[3]{x}-3x^2}{x^2}$
в) $\int (2x+1)^4$	в) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{2+e^x}}$	в) $\int (3x-4)^3$	в) $\int \frac{\sin xdx}{2+3\cos x}$
г) $\int \sin 3xdx$	г) $\int \frac{\cos tdt}{\sqrt[3]{1+\sin x}}$	г) $\int \sin 2xdx$	г) $\int \frac{2e^t dt}{(2+e^t)^2}$

Практическая работа № 7
Вычисление определенного интеграла

Цель работы:

На конкретных примерах научиться находить определенный интеграл

Порядок выполнения работы:

1. Повторить основные понятия: формулу Ньютона-Лейбница, методы вычисления определенного интеграла.
2. Рассмотреть решенные примеры.
3. Решить задания для самостоятельной работы.
4. Сдать преподавателю тетради для практических работ.

1. Основные понятия.

Пусть требуется вычислить определенный интеграл $I=\int_b^a f(x)dx$ от непрерывной функции $f(x)$. Если будет найдена первообразная функция $F(x)$ подынтегральной функции, то величина определенного интеграла вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_b^a f(x)dx = F(b)-F(a)$$

Основные методы вычисления определенного интеграла:

- непосредственное интегрирование.
- метод замены переменной под знаком определенного интеграла.

2. Примеры.

2.1. Непосредственное интегрирование

Пример 1. Вычислить $\int_0^{\pi/2}(2\cos x - 3\sin x)dx$

Решение.

$$\int_0^{\pi/2}(2\cos x - 3\sin x)dx = 2\int_0^{\pi/2}\cos xdx - 3\int_0^{\pi/2}\sin xdx = \left[2\sin x + 3\cos x\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \left(2\sin\frac{\pi}{2} + 3\cos\frac{\pi}{2}\right) - \left(2\sin 0 + 3\cos 0\right) = 2 - 3 = -1$$

2.2.Метод замены переменной

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\sin x}$.

Решение.

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\sin x} = \left(\begin{array}{l} t = tg\frac{x}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2};\ dx = \frac{2dt}{1+t^2};\ x = 0;\ t = tg\frac{0}{2} = tg\,0 = 0; \\ x = \frac{\pi}{2}, \quad t = tg\frac{\pi}{4} = 1 \end{array}\right) =$$

$$= \int_0^1 \frac{2dt}{(1+t^2)\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)} = 2\int_0^1\frac{dt}{1+2t+t^2} = 2\int_0^1\frac{dt}{(1+t)^2} = 2\int_0^1(1+t)^{-2}dt = 2\left.\frac{(1+t)^{-2+1}}{-2+1}\right|_0^1 =$$

$$= 2\left.\frac{(1+t)^{-1}}{-1}\right|_0^1 = -\left.\frac{2}{1+t}\right|_0^1 = -\left(\frac{2}{2}-\frac{2}{1}\right) = -1+2 = 1$$

Ответ. 1.

3. Задания для самостоятельной работы

Самостоятельная работа I-вариант	Самостоятельная работа II-вариант
1. Вычислите определенные интегралы методом непосредственного интегрирования: 1) $\int_{-\frac{2}{3}}^{1} x^3dx$ 2) $\int_4^9 x^{-\frac{1}{2}}dx$ 3) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin xdx$ 4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{-16\,dx}{\sin^2 x}$ 5) $\int_0^4 0{,}5e^x dx$	1. Вычислите определенные интегралы методом непосредственного интегрирования: 1) $\int_1^3 x^{-2}dx$ 2) $\int_0^1 x^4dx$ 3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$ 4) $\int_0^{\pi}\frac{-9dx}{\cos^2 x}$ 5) $\int_{-1}^{1}2e^x dx$

2. Вычислить определенный интеграл методом замены переменной: $\int_0^{1/2} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$	2. Вычислить определенный интеграл методом замены переменной $\int_0^1 x^3\sqrt{4+5x^4}\,dx$

Практическая работа № 8
Вычисление площади криволинейной трапеции
с помощью определённого интеграла

Цель работы:
На конкретных примерах научиться находить площадь криволинейной трапеции
Порядок выполнения работы:

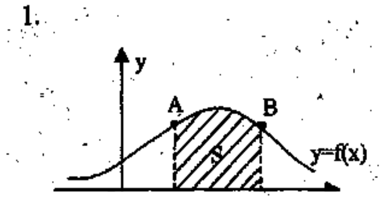
1. Повторить понятие криволинейной трапеции и формулы для вычисления площади криволинейной трапеции.
2. Рассмотреть решенные примеры.
3. Решить задания для самостоятельной работы.
4. Сдать преподавателю тетради для практических работ.

2. Основные понятия:

1. Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная отрезком оси абсцисс, отрезками вертикальных прямых $x=a$ и $x=b$ и графиком заданной функции (рис.1).

2. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $y=f(x)$, двумя прямыми $x=a$ и $x=b$ и осью абсцисс, вычисляется с помощью определенного интеграла по формулам:

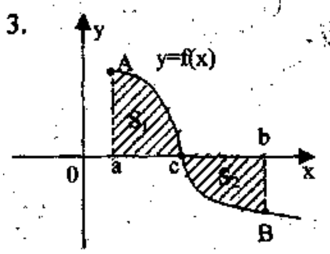
1.



$$S=\int_a^b f(x)dx$$

21

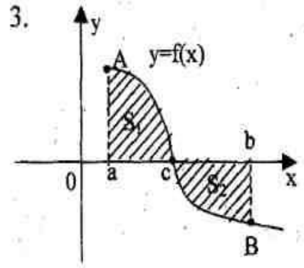
3.



$$f(x)=0 \Rightarrow x=c$$

$$S=S_1+S_2=\int_a^c f(x)dx+\left|\int_c^b f(x)dx\right|$$

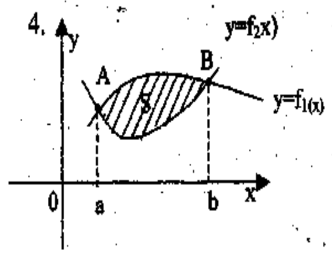
3.



$$f(x)=0 \Rightarrow x=c$$

$$S=S_1+S_2=\int_a^c f(x)dx+\left|\int_c^b f(x)dx\right|$$

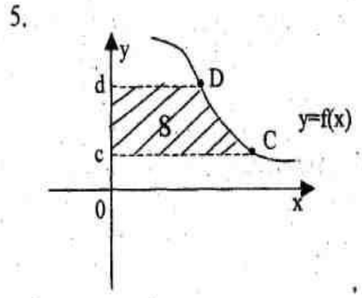
4.



$$f_1(x)=f_2(x) \Rightarrow x_1=a, x_2=b$$

$$S=\int_a^b f_1(x)dx-\int_a^b f_2(x)dx$$

5.

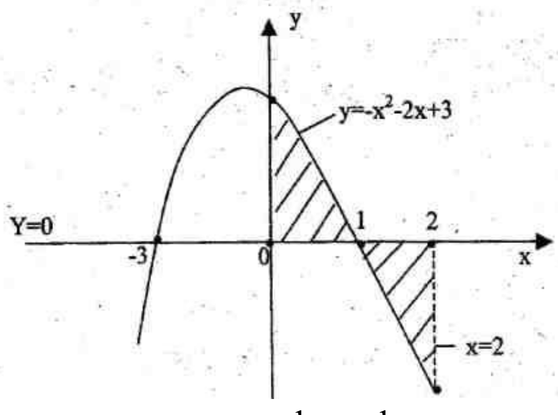


$$y=f(x) \Rightarrow x=\varphi(y)$$

$$S=\int_c^d \varphi(y)dy$$

2. **Пример:** Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2-2x+3$, осями координат и прямой *x=2*.

Решение: Построим данные линии



Найдем точки пересечения графика функции с осью Ох: $y=-x^2-2x+3$, $-x^2-2x+3=0$, $x_1=1,\quad x_2=-3$

$$S=\int_0^1(-x^2-2x+3)dx-\int_1^2(-x^2-2x+3)dx=\left.(-\frac{x^3}{3}-x^2+3x)\right|_0^1+\left.(-\frac{x^3}{3}-x^2+3x)\right|_1^2=$$

$$=-\frac{1}{3}-1+3-(-\frac{8}{3}-4+6)+(-\frac{1}{3}-1+3)=\frac{5}{3}+\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{12}{3}=4(кв.ед.)$$

3. Задания для самостоятельной работы:

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями		
Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
$y = x^2+4x$ $y = x+4$	$y = x^2$ $y = 2-x^2$	$y = 4x - x^2$ $y = 4-x$

Практическая работа № 9
Дифференциальные уравнения с разделяющими переменными

Цель работы:

На конкретных примерах научиться решать дифференциальные уравнения с разделяющими переменными

Порядок выполнения работы:

1. Повторить понятия дифференциального уравнения и его решения, дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.
2. Рассмотреть решенные примеры.
3. Решить задания для самостоятельной работы.
4. Сдать преподавателю тетради для практических работ.

2. Основные понятия

2.1. Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производные искомой функции или её дифференциалы.

2.2. Решением дифференциального уравнения называется такая функция, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество.

2.3. Решение, содержащее произвольную постоянную C, называется общим решением дифференциального уравнения.

2.4. Решение, в которое подставлено числовое значение произвольной постоянной C, называется частным решением дифференциального уравнения.

2.5. Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его можно записать в виде

$$f(x)dx = g(y)dy.$$

Каждая часть этого уравнения представляет собой произведение некоторого выражения, зависящего от одной переменной, на дифференциал этой переменной.

3. Примеры.

Пример1. Найти решение дифференциального уравнения $\frac{y}{y'} = \ln y$ при условии y(2) = 1.

$$\frac{ydx}{dy} = \ln y \qquad dx = \frac{\ln ydy}{y} \qquad \int dx = \int \frac{\ln ydy}{y} \qquad x + C = \int \ln yd(\ln y)$$

$$x + C = \frac{\ln^2 y}{2}$$ - общее решение

при y(2) = 1 получаем $2 + C = \frac{\ln^2 1}{2}; \quad \Rightarrow \quad 2 + C = 0; \quad \Rightarrow \quad C = -2;$

Итого: $2(x-2) = \ln^2 y;$ или $y = e^{\pm\sqrt{2x-4}}$ - частное решение;

Пример2. Решить уравнение $y' = x(y^2 + 1).$

$$\frac{dy}{y^2+1} = dx; \qquad \int \frac{dy}{y^2+1} = \int dx;$$

$$arctgy = \frac{x^2}{2} + C; \qquad y = tg\left(\frac{x^2}{2} + C\right);$$

3. Задания для самостоятельной работы:

I вариант:	I I вариант:
1. Проверить, является ли решением данного дифференциального уравнения указанная функция:	
$x^2 y' - 2xy = 3$ $y = 3x^2 - \frac{1}{x}$	$xy' + 2y = e^{x^2}$ $y = 3 - e^{-x^2}$
1. Решите уравнение с разделяющими переменными	
$ydy - (1+2x)dx = 0$	$(1+x^2)y' - 2xy = 0$
2. Найдите решение, удовлетворяющее начальному условию	
$(1+x^3)y' = 3x^2 y$ y(0)=2	$2\sqrt{y}dx - dy = 0$ y(0)=1

Практическая работа № 10
Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Цель работы:
На конкретных примерах научиться решать линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
Порядок выполнения работы:
1. Повторить понятия дифференциального уравнения и его решения, линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
2. Рассмотреть решенные примеры.
3. Решить задания для самостоятельной работы.
4. Сдать преподавателю тетради для практических работ.

1. Основные понятия.
2.1. Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производные искомой функции или её дифференциалы.
2.2. Решением дифференциального уравнения называется такая функция, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество.
2.3. Решение, содержащее произвольную постоянную С, называется общим решением дифференциального уравнения.
2.4. Решение, в которое подставлено числовое значение произвольной постоянной С, называется частным решением дифференциального уравнения.
2.5. Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида:

$y'' + py' + qy = 0$, где p и q- постоянные величины.

Для отыскания общего решения данного уравнения составляется соответствующее характеристическое уравнение:

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Тогда общее решение дифференциального уравнения записывается в зависимости от

Характеристическое уравнение	$k^2 + pk + q = 0$

дискриминанта характеристического уравнения и его корней.

Дискриминант	D>0	D=0	D<0
Корни характеристического уравнения	$k_1 \neq k_2$	$k_1 = k_2$	$k_1 = a + bi$ $k_2 = a - bi$
Множества решений	$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$	$y = e^{kx}(c_1 + c_2 x)$	$y = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$

3. Примеры

Пример 1. Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = 0.$

Характеристическое уравнение: $k^2 - 4k + 4 = 0;\quad k_1 = k_2 = 2.$

Общее решение: $\boxed{y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.}$

Пример 2. Решить уравнение $y'' + 2y' + 5y = 0.$

Характеристическое уравнение: $k^2 + 2k + 5 = 0;\quad D = -16;\quad k_1 = -1 + 2i;$
$k_2 = -1 - 2i.$

Общее решение: $\boxed{y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).}$

4. Задания для самостоятельной работы:

Решить уравнения:	Найдите частные решения уравнений:
а) $y'' - 5y' + 4y = 0$ б)) $y'' - 7y' + 12y = 0$ в) $y'' - 4y' + 5y = 0$	а) $y'' - 10y' + 25y = 0;$ y=2 и $y' = 8$ при x=0 б) $y'' + 6y' + 9y = 0;$ y=1 и $y' = 2$ при x=0 в) $y'' - 9y = 0;$ y=2 и $y' = 6$ при x=0

Практическая работа №11
Численное интегрирование. Формулы прямоугольников и трапеций. Относительная погрешность вычисления.

Цель работы: на конкретных примерах научить обучающихся приближенно вычислять определенный интеграл с помощью формул прямоугольников и трапеций.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить формулы прямоугольников и трапеций для приближенного вычисления определенного интеграла, формулу вычисления относительной погрешности вычислений.
2. Рассмотреть решенные примеры.
3. Решить задания для самостоятельной работы.
4. Сдать преподавателю тетради для практических работ

1. 1. Формулы прямоугольников для приближенного вычисления определенного интеграла:

Пусть требуется определить значение интеграла функции на отрезке $[a, b]$. Этот отрезок делится точками $x_0 = a$, x_1, x_2, x_3, …, x_n на n равных отрезков длиной $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

Обозначим через $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n$ и вычислим значения функции f(x) в точках $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$.

Тогда можно получить две формулы:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}).$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$$

Первая формула выражает площадь ступенчатой фигуры, составленной из «входящих» прямоугольников – с недостатком, а вторая - площадь ступенчатой фигуры, состоящей из «выходящих» прямоугольников – с избытком. Чем меньше длина отрезков, на которые делится отрезок [*a*,*b*], тем точнее значение, вычисляемое по этой формуле, искомого интеграла.

1.2. Формула трапеций.

$$I \approx h\left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right), \quad h = \frac{b-a}{n}$$

1.3. Относительная погрешность вычисления: $\delta = \frac{I_{прибл.} - I_{точн}}{I_{точн}} \cdot 100\%$

2 Примеры.

2.1. Вычислить приближено интеграл $\int_0^4 x^2 dx$ по формуле прямоугольников, разбив промежуток интегрирования на 10 равных частей. Найти погрешность вычисления.

Решение.

n = 10, тогда $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4}{10} = 0{,}4$.

Точки деления: $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}4$, $x_2 = 0{,}8$, $x_3 = 1{,}2$, $x_4 = 1{,}6$, $x_5 = 2$, $x_6 = 2{,}4$, $x_7 = 2{,}8$,

$x_8 = 3{,}2$, $x_9 = 3{,}6$, $x_{10} = 4$.

Найдем значения функции в точках деления: $y_0 = 0$, $y_1 = 0{,}16$, $y_2 = 0{,}64$, $y_3 = 1{,}44$,

$y_4 = 2{,}56$, $y_5 = 4$, $y_6 = 5{,}76$, $y_7 = 7{,}84$, $y_8 = 10{,}24$, $y_9 = 12{,}96$, $y_{10} = 16$.

Вычислим интеграл по первой формуле прямоугольников (с недостатком):

$\int_0^4 x^2 dx = 0{,}4 \cdot (0 + 0{,}16 + 0{,}64 + 1{,}44 + 2{,}56 + 4 + 5{,}76 + 7{,} 84 + 10{,}24 + 12{,}96 + 16) =$

$= 0{,}4 \cdot 61{,}6 = 24{,}64$

$I_{прибл.} = 24{,}64$, $I_{точн.} = 21{,}33$, тогда $\delta = \frac{\mathbf{I}прибл.-\mathbf{I}точн}{\mathbf{I}точн} \cdot 100\% = \frac{\mathbf{24{,}64-21{,}33}}{\mathbf{21{,}33}} \cdot 100\% =$
$=15{,}52\%$

2.2. Вычислить приближено интеграл $\int_0^4 x^2 dx$ по формуле трапеций, разбив промежуток интегрирования на 10 равных частей. Найти погрешность вычисления.

Решение. Используя вычисленные в примере 2.1 значения x и y, найдем приближенное значение интеграла по формуле трапеций:

$\int_0^4 x^2 dx = 0{,}4 \cdot (\frac{0+16}{2} + 0{,}16 + 0{,}64 + 1{,}44 + 2{,}56 + 4 + 5{,}76 + 7{,} 84 + 10{,}24 + 12{,}96) = 21{,}44.$

Найдем относительную погрешность вычисления: $I_{точн.} = 21{,}33$.
$\delta = \frac{\mathbf{I}прибл.-\mathbf{I}точн}{\mathbf{I}точн} \cdot 100\% = \frac{\mathbf{21{,}44-21{,}33}}{\mathbf{21{,}33}} \cdot 100\% = 0{,}5\%.$

3. Задачи для самостоятельной работы.

Вычислить по формуле прямоугольников и формуле трапеций интеграл $\int_2^{12} \frac{dx}{x}$, разбивая промежуток интегрирования на 10 частей.

Практическая работа №12
Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод Эйлера

Цель работы: Применение метода Эйлера для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Порядок выполнения работы:
1. Повторить формулы метода Эйлера.
2. Рассмотреть решенный пример.
3. Решить задания для самостоятельной работы.
4. Сдать преподавателю тетради для практических работ

1. Основные понятия.

1.1. Обыкновенным *дифференциальным уравнением n –го порядка* называется уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', \ \dots\ , y^{(n)}) = 0,$$

где F — известная функция переменной x где x - независимая переменная из интервала (a,b), y - неизвестная функция.

1.2. Число n называется порядком уравнения.

1.3. Функция y называется *решением* (или *интегралом*) дифференциального уравнения на промежутке (a, b), если она n раз дифференцируема на (a, b) и при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

1.4. Для исследования и решения *дифференциальных* уравнений часто используются *численные методы* , в частности, *метод Эйлера*.

Метод Эйлера. Дифференциальное уравнение $y'=f(x, y)$ определяет на плоскости так называемое *поле направлений*, т. е. в каждой точке плоскости, в которой существует функция $f(x, y)$, задает направление интегральной кривой, проходящей через эту точку.

Пусть требуется решить задачу Коши, т. е. найти решение уравнения $y' = f(x,y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Разделим отрезок $[x_0, X]$ на n равных частей и положим $(X—x_0)/n = h$ (h—шаг изменения аргумента). Допустим, что внутри элементарного промежутка от x_0 до $x_{,,} +h$ функция y' сохраняет постоянное значение $f(x_0,y_0)$. Тогда $y_1-y_0 \cong h\text{-}f(x_0, y_0)$, где y_1—значение искомой функции, соответствующее значению $x_1 = x_0 +h$.

Отсюда получаем:

$$y_1 \cong y_0 + h\text{-}f(x_0,y_0).$$

Повторяя эту операцию, получим последовательные значения функции:

$$y_2 \cong y_1 + h\text{-}f(x_1,y_1),\quad y_3 \cong y_2 + h\text{-}f(x_2,y_2),\ \ldots.$$

$$\boldsymbol{y_{k+1} \cong y_k + h + f(x_k,y_k)}$$

Таким образом, можно приближенно построить интегральную кривую в виде ломаной с вершинами $M_k(x_k;y_k)$. Этот метод называется *методом ломаных Эйлера,* или просто *методом Эйлера.*

2. Пример:

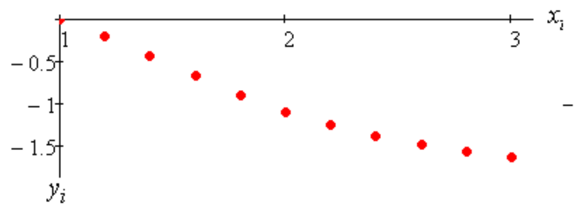
Методом Эйлера решить дифференциальное уравнение $y' = y^2 - x$ на отрезке [1,3] с шагом $h = 0.2$, при начальном условии $y(1) = 0$.

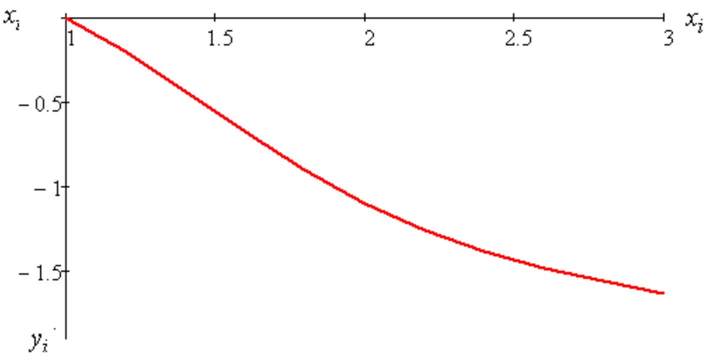
Изобразим решение графически.

$$x_0 = 1,\ y_0 = 1,\ i = 0, 2, \ldots, 9,\ x_{i+1} = 1. + 0.2(i+1), y_{i+1} = y_i + 0.2 \cdot \left(y_i^2 - x_i\right)$$

Ниже приведены: таблица значений приближённого решения в узлах равномерной сетки с шагом $h = 0.2$, график приближённого решения.

x_i	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
y_i	0	-0.2	-0.432	-0.675	-0.904	-1.1	-1.258	-1.382	-1.48	-1.562	-1.634





3. Задания для самостоятельной работы:

1. Методом Эйлера найти четыре значения функции *y,* определяемой уравнением $y' = 1 + x + y^2$, при начальном условии y(0) = 1, полагая h= 0,1.

2. Методом Эйлера найти четыре значения функции *y,* определяемой уравнением $y' = x^2 + y^2$, при начальном условии y (0) = 0, полагая h = 0,1.

Практическая работа №13
По основам аналитической геометрии

Цель работы: Применение основ аналитической геометрии
Порядок выполнения работы:

1. **Повторить формулы аналитической геометрии:**
   1) Виды прямых и кривых на плоскости и в пространстве
   2) Решение задач с использованием уравнения прямой
   3) Кривые второго порядка

4).
1. Рассмотреть решенный пример.
2. Решить задания для самостоятельной работы.
3. Сдать преподавателю тетради для практических работ

2. Основные понятия.

<u>РАЗЛИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ.</u>

1.Общее ур-е пр. 2. Ур-е пр. в отрезках. 3. Каноническое ур-е пр. 4. Ур-е пр. ч/з две точки. 5. Ур-е пр. с углов. коэфф. 6. Нормальное ур-е прямой. Расст. от точки до прямой. 7. Параметрическое ур-е пр. 8. Пучок пр. 9.Угол между пр.

1. Ax+By+C=0 (1), где A, B одновр.не равны нулю.

Теорема: $n(A,B)$ ортоганален прямой заданной ур-ем (1).

Доказательство: подставим коорд. т.M_0 в ур-е (1) и получим $Ax_0+By_0+C=0$ (1’). Вычтем (1)-(1’) получим $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$, $n(A,B)$, $M_0M(x-x_0, y-y_0)$. Слева в полученном равенстве записано скалярное произведение векторов, оно равно 0, значит n и M_0M ортоганальны. Т.о. n ортоганлен прямой. Вектор $n(A,B)$ называется нормальным вектором прямой.

Замечание: пусть ур-я $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ определяют одну и ту же прямую, тогда найдется такое действительное число t, что $A_1=t*A_2$ и т.д.

Определение: если хотя бы один из коэффициентов в ур-ии (1) =0, то ур-е называется неполным.

1. C=0, Ax+By=0 – проходит ч/з (0,0)

2. C=0, A=0, By=0, значит y=0

3. C=0, B=0, Ax=0, значит x=0

4. A=0, By+C=0, паралл. OX

5. B=0, Ax+C=0, паралл. OY

2. x/a+y/b=1.

Геом.смысл: прямая отсекает на осях координат отрезки a и b

3. $x-x_1/e=y-y_1/m$

Пусть на прямой задана точка и напр. вектор прямой (паралл.пр.). Возьмем на прямой произв. точки. q и $M_1M(x-x_1; y-y_1)$

4. $x-x_1/x_2-x_1=y-y_1/y_2-y_1$

Пусть на прямой даны две точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$. Т.к. на прямой заданы две точки, то задан направляющий вектор $q(x_2-x_1; y_2-y_1)$

5. y=kb+b. u – угол наклона прямой. Tg угла наклона называется угловым коэффициентом прямой k=tg u

Пусть прямая задана в каноническом виде. Найдем угловой коэффициент прямой tg u = m/e. Тогда видим $x-x_1/e/e=y-y_1/m/e$. $y-y_1=k(x-x_1)$ при $y_1-kx_1=b$, y=kx+b

6. xcosq +ysinq -P=0

q - угол между вектором OP и положительным напр. оси OX.

Задача: записать ур-е прямой , если изветны P и q

Решение: Выделим на прямой OP вектор ед. длины n. |n|=1, n(cosq , sinq). Пусть M(x,y) – произв.точка прямой. Рассмотрим два вектора n и OM. Найдем двумя способвами их скал.произведение. 1. OM*n=|OM||n|cosMOP=P. 2. OM*n=cosq x+sinq y. Приравняем правые части.

Задача: прямая задана общим ур-ем. Перейти к норм. виду.

Ax+By+C=0

xcosq +ysinq -P=0

т.к. уравнения определяют одну прямую, то сущ. коэфф. пропорциональности.

$\mathrm{Cos}^{2q} = (A*t)^2$

$\mathrm{Sin}^{2q} = (B*t)^2$

-p=C*t

$\cos^{2q} + \sin^{2q} = t^2(A^2+B^2)$, $t^2=1/A^2+B^2$, $t=\pm$ sqrt$(1/ A^2+B^2)$. Sign t= - sign C

Что бы найти нормальное уравнение прямой нужно общее ур-е умножить на t.

Atx+Bty+Ct=0, t-нормирующий множитель.

РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ.

Ax+By+Cz+D=0; $M_0(x_0;y_0;z_0)$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Угол между плоскостями: пусть заданы две плоскости: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$; $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, поэтому $n_1(A_1;B_1;C_1)$; $n_2(A_2;B_2;C_2)$. Отыскание угла между плоскостями сводится к отысканию его между нормальными векторами.

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Расстояние между плоскостями

Определение.

Расстояние между плоскостями — равно длине перпендикуляра, опущенного с одной плоскости на другую.

Формула для вычисления расстояния между плоскостями

Если заданы уравнения параллельных плоскостей $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ и $Ax + By + Cz + D_2 = 0$, то расстояние между плоскостями можно найти, используя следующую формулу

$$d = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

\Примеры задач на вычисление расстояния между плоскостями

Пример 1.

2. Найти расстояние между плоскостями $2x + 4y - 4z - 6 = 0$ и $x + 2y - 2z + 9 = 0$.

Решение. Проверим, параллельны ли плоскости, для этого умножим уравнение второй плоскости на 2

$$2x + 4y - 4z + 18 = 0$$

Так как коэффициенты при неизвестных величинах у полученного уравнения и первого уравнения равны, то для вычисления расстояния между плоскостями можно использовать приведенную выше формулу:

$$d = \frac{|18 - (-6)|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{|24|}{\sqrt{36}} = \frac{24}{6} = 4$$

Ответ: расстояние между плоскостями равно 4.

Расстояние

Расстояние от произвольной точки $M\ (x;\ y;\ z)$ до точки C вычисляется по формуле

$$MC = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Если точка M лежит на данной сфере, то $MC = R$, или $MC^2 = R^2$, т. е. координаты точки M удовлетворяют уравнению

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2. \qquad (1)$$

Если же точка $M\ (x;\ y;\ z)$ не лежит на данной сфере, то $MC^2 \neq R^2$, т. е. координаты точки M не удовлетворяют уравнению (1). Следовательно, **в прямоугольной системе координат уравнение сферы радиуса R с центром $C\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$** имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

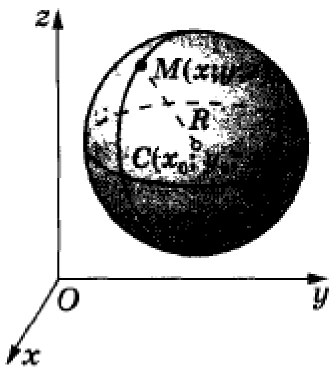


Рис. 159

Это и есть уравнение окружности в пространстве с центром в точке с координатами $(x_0 y_0 z_0)$ и радиусом R.

$a_{11}'x'^2+a_{22}'y'^2+2a_{13}'x'+2a_{23}'y'+a_{33}'=0$ (3)

<u>ТЕОРЕМА О ЛИНИЯХ ЭЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА.</u>

<u>Теорема:</u> Пусть задана линия элиптического типа т.е. $I_2>0$ и пусть $I_1>0$ следовательно уравнение (1) определяет: 1. $I_3<0$ – эллипс; 2. $I_3=0$ – точка; 3. $I_3>0$ – ур-е (1) не определяет. Если $I_3=0$ говорят,

что эллипс вырождается в точку. Если $I_3>0$ говорят, что задается мнимый эллипс. Пусть после ПП и поворота ур-е (1) принимает вид (*).

Доказательство:

1. пусть $I_2>0$, $I_1>0$, $I_3<0$, тогда

$a_{11}''x''^2+a_{22}''\,y''^2= -I_3/I_2$

$$\frac{x''^2}{-\frac{I_3}{I_2 a_{11}''}}+\frac{y''^2}{-\frac{I_3}{I_2 a_{22}''}}=1$$

$I_2=a_{11}''a_{22}'' > 0$

$I_1= a_{11}''+a_{22}'' > 0$

$a_{11}'' > 0$; $a_{22}'' > 0$

$$\frac{x''^2}{\left(\sqrt{-\frac{I_3}{I_2 a_{11}''}}\right)^2}+\frac{y''^2}{\left(\sqrt{-\frac{I_3}{I_2 a_{22}''}}\right)^2}=1$$ - **уравнение эллипса**

Итак, под корнями стоят положительные числа, следовательно, уравнение эллипса.

2. $I_3>0$ в данном случае под корнем стоят отрицательные числа, следовательно уравнение не определяет действительного геометрического образа.

3. $I_3=0$ в данном случае т(0,0) – случай вырождения эллипса.

ГИПЕРБОЛА.

Определение: ГМТ на плоскости модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная

Каноническое уравнение:

Будем считать, что фокусы гиперболы находятся на OX на одинаковом расстоянии от начала координат. $|F_1F_2|=2c$, M – произвольная точка гиперболы. r_1, r2 – расстояния от M до фокусов; $|r_2-r_1|=2a$; $a<c$;

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2},\quad r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right|=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x+c)^2+y^2} \pm 2a$$

$$xc - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$x^2c^2-2a^2xc+a^2=a^2(x^2-2xc+c^2+y^2)$

$x^2(c^2-a^2)-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$

$c^2-a^2=b^2$

$x^2b^2-a^2y^2=a^2b^2$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ - каноническое ур-е гиперболы

ПАРАБОЛА.

Определение: ГМТ на плоскости расстояние от которых до фиксированной точки на плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до фиксированной прямой этой плоскости называемой директрисой.

Каноническое уравнение:

Пусть фокус параболы находится на оси OX, а директриса расположение перпендикулярно оси OX, причем они находятся на одинаковом расстоянии от начала координат.

$|DF|=p$, M – произвольная точка параболы; K – точка на директрисе; $MF=r$; $MK=d$;

$r=sqrt((x-p/2)^2+y^2)$; $d=p/2+x$

Приравниваем и получаем:

$y^2=2px$ - каноническое уравнение параболы

ЭКСЦЕНТРИСИТЕТ И ДИРЕКТРИСА ЭЛЛИПСА И ГИПЕРБОЛЫ.

1. Определение: эксцентриситет – величина равная отношению c к a.

$e=c/a$

e эллипсв <1 (т.к. $a>c$)

e гиперболы >1 (т.к. $c>a$)

Определение: окружность – эллипс у которого $a=b$, $c=0$, $e=0$.

Выразим эксцентриситеты через a и b:

$$e_{эл} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

$$e_{гип} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

e эллипса является мерой его “вытянутости”

e гиперболы характеризует угол раствора между асимптотами

2. Директрисой D эллипса (гиперболы), соответствующей фокусу F, называется прямая расположенная в полуплоскости а перпендикулярно большой оси эллипса и отстоящий от его центра на расстоянии a/e>a (a/e<a)

D_1: x= - a/e

D_2: x= a/e

p=a(1-e^2)/e – для эллипса

p=a(e^2-1)/e – для гиперболы

<u>ТЕОРЕМА ОБ ОТНОШЕНИИ РАССТОЯНИЙ. 2-ОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЛИПСА, ГИПЕРБОЛЫ, ПАРАБОЛЫ.</u>

<u>Теорема:</u> Отношение расстояния любой точки эллипса (гиперболы) до фокуса к расстоянию от нее до соответствующей директрисы есть величина постоянная равная e эллипса (гиперболы).

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{xe + a}{\frac{xe + a}{e}} = e$$

<u>Определение:</u> ГМТ на плоскости, отношение расстояния от которых до фокуса, к расстоянию до соответствующей директрисы есть величина постоянная и представляет собой эллипс, если <1, гиперболу, если >1, параболу, если =1.

<u>КАСАТЕЛЬНАЯ К КРИВОЙ 2-ГО ПОРЯДКА.</u>

Пусть задан эллипс в каноническом виде. Найдем уравнение касательной к нему, проходящей через $M_0(x_0;y_0)$ – точка касания, она принадлежит эллипсу значит справедливо:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

$y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

Рассмотрим касательную к кривой $y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$ следовательно $\sqrt{(a^2 - x^2)} = \frac{ya}{b}$

$$y' = \frac{b}{a}\frac{(-2x)}{2\sqrt{(a^2-b^2)}} = -\frac{bx}{a\cdot\frac{ya}{b}} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

$$y'(x_0) = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$$

$ya^2y_0 - a^2y_0^2 + b^2x_0x - b^2x_0^2 = 0$

$$\frac{yy_0}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{xx_0}{a^2} - \frac{x_0^2}{a^2} = 0$$

$$\frac{yy_0}{b^2} + \frac{xx_0}{a^2} - \left(\frac{y_0^2}{b^2} + \frac{x_0^2}{a^2}\right) = 0$$

$\frac{yy_0}{b^2} + \frac{xx_0}{a^2} = 1$ - уравнение касательной к эллипсу.

$\frac{yy_0}{b^2} - \frac{xx_0}{a^2} = 1$ - уравнение касательной к гиперболе.

Вариант 1.

1. Что называется эллипсом?
2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку A(1, 2) перпендикулярно вектору $\vec{n}(3, -1)$.
3. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса, заданного уравнением: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Вариант 2.

1. Что называется гиперболой?
2. Найти уравнение прямой, проходящей через точки A(1, 2) и B(3, 4).
3. Составить уравнение эллипса, если его фокусы $F_1(0; 0)$, $F_2(1; 1)$, большая ось равна

Вариант 3.

1. Что называется параболой?
2. Найти уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{a}(1, -1)$ и проходящей через точку A(1, 2).
3. На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.

Вариант 4.

1. Запишите уравнение окружности.
2. Задано общее уравнение прямой $x - y + 1 = 0$. Найти уравнение этой прямой в отрезках.
3. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса с уравнением $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Вариант 1.

1. Что называется эллипсом?
2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку A(1, 2) перпендикулярно вектору $\vec{n}(3, -1)$.
3. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса, заданного уравнением: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

Вариант 2.

1. Что называется гиперболой?
2. Найти уравнение прямой, проходящей через точки A(1, 2) и B(3, 4).
3. Составить уравнение эллипса, если его фокусы $F_1(0; 0)$, $F_2(1; 1)$, большая ось равна

Вариант 3.

1. Что называется параболой?
2. Найти уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{a}(1, -1)$ и проходящей через точку A(1, 2).
3. На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.

Вариант 4.

1. Запишите уравнение окружности.
2. Задано общее уравнение прямой $x - y + 1 = 0$. Найти уравнение этой прямой в отрезках.
3. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса с уравнением $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Критерии оценивания практических работ

Оценка «5» ставится, если верно и рационально решено 91%-100% предлагаемых заданий, допустим 1 недочет, не искажающий сути решения.

Оценка «4» ставится при безошибочном решении 71-90% предлагаемых заданий.

Оценка «3» ставится, если выполнено 65-70% предлагаемых заданий, допустим 1 недочет.

Оценка «2» - решено мене 65% предлагаемых заданий.

Порядок оформления:

Работа оформляется в отдельной тетради. Работы должны быть написаны аккуратно (разборчивый почерк, оставление полей, записаны полностью условия заданий и т.п.).